

Teorema do Núcleo e da Imagem

Álgebra Linear – Videoaula 11

Luiz Gustavo Cordeiro



Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Teorema (Teorema do Núcleo e da Imagem)

Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais.

Então

$$\text{rank}(T) + \text{nulidade}(T) = \dim(V)$$

i.e.,

$$\dim(\text{im}(T)) + \dim(\text{ker}(T)) = \dim(V)$$

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{im}(T)) + \dim(\operatorname{ker}(T))$$

Seja $\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_n\}$ uma base de $\operatorname{ker}(T)$.

Estenda \mathcal{K} para uma base $\mathcal{B} = \{k_1, \dots, k_n, r_1, \dots, r_m\}$ de V .

Tome $\mathcal{R} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{K} = \{r_1, \dots, r_m\}$.

- Afirmação: $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \dots, T(r_m)\}$ é gerador de $\operatorname{im}(T)$.

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{im}(T)) + \dim(\operatorname{ker}(T))$$

- $\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_n\}$ base de $\operatorname{ker}(T)$;
- $\mathcal{B} = \{k_1, \dots, k_n, r_1, \dots, r_m\}$;
- $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_m\}$;
- Afirmação: $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \dots, T(r_m)\}$ é gerador de $\operatorname{im}(T)$.

Seja $w \in \operatorname{im}(T)$. Então

$$w = T(v)$$

para algum $v \in V$. Como $\mathcal{B} = \mathcal{K} \cup \mathcal{R}$ é base,

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i k_i + \sum_{j=1}^m \mu_j r_j$$

para certos λ_i, μ_j .

- Afirmação: $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \dots, T(r_m)\}$ é gerador de $\text{im}(T)$.

Então

$$\begin{aligned}w &= T(v) \\&= T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i k_i + \sum_{j=1}^m \mu_j r_j\right) \\&= \sum_{i=1}^n \lambda_i T(\underbrace{k_i}_{\in \ker(T)}) + \sum_{j=1}^m \mu_j T(r_j) \\&= \sum_{j=1}^m \mu_j T(r_j) \in \langle T(\mathcal{R}) \rangle.\end{aligned}$$

A prova

- $T(\mathcal{R})$ é gerador de $\text{im}(T)$. ✓
- Afirmação: $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \dots, T(r_m)\}$ é LI.

Suponha $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$0_W = \sum_{j=1}^m \alpha_j T(r_j) = T\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j r_j\right)$$

Então $\sum_{j=1}^m \alpha_j r_j \in \ker(T)$, que é gerado pela sua base \mathcal{K} .

Existem β_1, \dots, β_n tais que

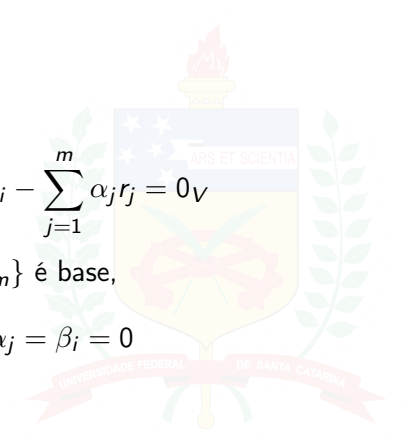
$$\sum_{j=1}^m \alpha_j r_j = \sum_{i=1}^n \beta_i k_i,$$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i k_i - \sum_{j=1}^m \alpha_j r_j = 0_V$$

Como $\mathcal{B} = \{k_1, \dots, k_n, r_1, \dots, r_m\}$ é base,

$$\alpha_j = \beta_i = 0$$

para todos i, j .



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

A prova

- $T(\mathcal{R})$ é gerador de $\text{im}(T)$. ✓
- $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \dots, T(r_m)\}$ é LI. ✓
- $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \dots, T(r_m)\}$ é base de $\text{im}(T)$ (com m elementos). ✓
- $\dim(\text{im}(T)) = m$ ✓

Portanto,

$$\begin{aligned}\dim(V) &= \#\mathcal{B} \\ &= \#\{k_1, \dots, k_n, r_1, \dots, r_m\} \\ &= n + m \\ &= \#\mathcal{K} + \#T(\mathcal{R}) \\ &= \dim(\ker(T)) + \dim(\text{im}(T)). \checkmark\end{aligned}$$

Uma aplicação

Podemos usar o Teorema do Núcleo e da Imagem para obter outra demonstração do teorema acerca de dimensão de soma de subespaços.

Sejam E e F subespaços de V . Construímos o espaço produto

$$E \times F$$

com operações

$$(e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$$

$$\lambda(e, f) = (\lambda e, \lambda f).$$

Note que

- $E \cong E \times \{0_V\}$, $e \cong (e, 0_V)$;
- $F \cong \{0_V\} \times F$, $f \cong (0_V, f)$;

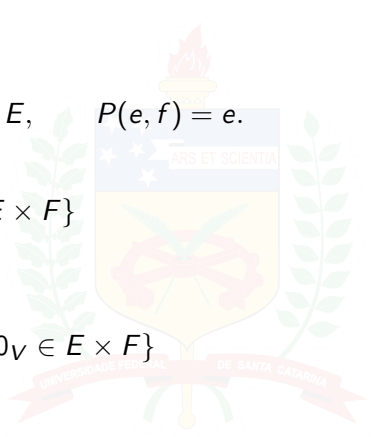
Uma aplicação

Tome

$$P: E \times F \rightarrow E, \quad P(e, f) = e.$$

Então

- $\text{im}(P) = \{P(e, f) : (e, f) \in E \times F\}$
 $= \{e : e \in E, f \in F\}$
 $= E$
- $\text{ker}(P) = \{(e, f) : P(e, f) = 0_V \in E \times F\}$
 $= \{(e, f) : e = 0_V\}$
 $= \{(0_V, f) : f \in F\}$
 $= \{0_V\} \times F \cong F$



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Uma aplicação

- $P: E \times F \rightarrow E, P(e, f) = e;$
- $\text{im}(P) = E;$
- $\text{ker}(P) \cong F;$

Pelo TNI,

$$\begin{aligned}\dim(E \times F) &= \dim(\text{ker}(P)) + \dim(\text{im}(P)) \\ &= \dim(E) + \dim(F)\end{aligned}$$



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Uma aplicação

Tome

$$S: E \times F \rightarrow V, \quad S(e, f) = e + f$$

Então

- $\text{im}(S) = \{S(e, f) : (e, f) \in E \times F\}$
 $= \{e + f : e \in E, f \in F\}$
 $= E + F$
- $\text{ker}(S) = \{(e, f) : S(e, f) = 0_V \in E \times F\}$
 $= \{(e, f) : e + f = 0_V\}$
 $= \{(e, f) : e = -f \in E \cap F\}$
 $= \{(x, -x) : x \in E \cap F\}$
 $\cong E \cap F$

Uma aplicação

- $S: E \times F \rightarrow V, S(e, f) = e + f;$
- $\text{im}(S) = E + F;$
- $\text{ker}(S) \cong E \cap F;$

Pelo TNI,

$$\begin{aligned}\dim(E \times F) &= \dim(\text{ker}(S)) + \dim(\text{im}(S)) \\ \dim(E) + \dim(F) &= \dim(E + F) + \dim(E \cap F)\end{aligned}$$



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA