Teorema do Núcleo e da Imagem

Álgebra Linear – Videoaula 11

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

O teorema

Teorema (Teorema do Núcleo e da Imagem)

Seja $T: V \to W$ *uma transformação linear entre espaços vetoriais. Então*

$$\operatorname{rank}(T) + \operatorname{nulidade}(T) = \dim(V)$$

i.e.,

$$\dim(\operatorname{im}(T)) + \dim(\ker(T)) = \dim(V)$$

A prova

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{im}(T)) + \dim(\ker(T))$$

Seja $\mathcal{K} = \{k_1, \ldots, k_n\}$ uma base de $\ker(T)$.

Estenda $\mathcal{K}$ para uma base $\mathcal{B} = \{k_1, \ldots, k_n, r_1, \ldots, r_m\}$ de V.

Tome $\mathcal{R} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{K} = \{r_1, \ldots, r_m\}$.

- Afirmação: $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \ldots, T(r_m)\}$ é gerador de $\mathrm{im}(T)$.

A prova

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{im}(T)) + \dim(\ker(T))$$

- $\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_n\}$ base de $\ker(T)$;
- $\mathcal{B} = \{k_1, \dots, k_n, r_1, \dots, r_m\}$;
- $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_m\}$;
- Afirmação: $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \dots, T(r_m)\}$ é gerador de $\mathrm{im}(T)$.

Seja $w \in \mathrm{im}(T)$. Então

$$w = T(v)$$

para algum $v \in V$. Como $\mathcal{B} = \mathcal{K} \cup \mathcal{R}$ é base,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j r_j$$

para certos λ_i, μ_j.

- Afirmação: $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \ldots, T(r_m)\}$ é gerador de $\mathrm{im}(T)$.

Então

$$\begin{aligned} w &= T(v) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j r_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(\underbrace{k_i}_{\in \ker(T)}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j T(r_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \mu_j T(r_j) \in \langle T(\mathcal{R}) \rangle. \end{aligned}$$

A prova

- $T(\mathcal{R})$ é gerador de $\mathrm{im}(T)$. ✓
- Afirmação: $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \ldots, T(r_m)\}$ é LI.

Suponha $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$0_W = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j T(r_j) = T\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j r_j\right)$$

Então $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j r_j \in \ker(T)$, que é gerado pela sua base $\mathcal{K}$.

Existem $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tais que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j r_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i k_i,$$

A prova

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i k_i - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j r_j = 0_V$$

Como $\mathcal{B} = \{k_1, \ldots, k_n, r_1, \ldots, r_m\}$ é base,

$$\alpha_j = \beta_i = 0$$

para todos i, j.

A prova

- $T(\mathcal{R})$ é gerador de $\text{im}(T)$. ✓
- $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \ldots, T(r_m)\}$ é LI. ✓
- $T(\mathcal{R}) = \{T(r_1), \ldots, T(r_m)\}$ é base de $\text{im}(T)$ (com m elementos). ✓
- $\dim(\text{im}(T)) = m$ ✓

Portanto,

$$\begin{aligned}
\dim(V) &= \#\mathcal{B} \\
&= \#\{k_1, \ldots, k_n, r_1, \ldots, r_m\} \\
&= n + m \\
&= \#\mathcal{K} + \#T(\mathcal{R}) \\
&= \dim(\ker(T)) + \dim(\text{im}(T)). \checkmark
\end{aligned}$$

Uma aplicação

Podemos usar o Teorema do Núcleo e da Imagem para obter outra demonstração do teorema acerca de dimensão de soma de subespaços.

Sejam E e F subespaços de V. Construímos o espaço produto

$$E \times F$$

com operações

$$(e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$$

$$\lambda(e, f) = (\lambda e, \lambda f).$$

Note que

- $E \cong E \times \{0_V\}$, $e \cong (e, 0_V)$;
- $F \cong \{0_V\} \times F$, $f \cong (0_V, f)$;

Uma aplicação

Tome

$$P\colon E \times F \to E, \qquad P(e, f) = e.$$

Então

- $$\begin{aligned} \operatorname{im}(P) &= \{P(e,f) : (e,f) \in E \times F\} \\ &= \{e : e \in E, f \in F\} \\ &= E \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \ker(P) &= \{(e,f) : P(e,f) = 0_V \in E \times F\} \\ &= \{(e,f) : e = 0_V\} \\ &= \{(0_V, f) : f \in F\} \\ &= \{0_V\} \times F \cong F \end{aligned}$$

Uma aplicação

- $P\colon E \times F \to E$, $P(e, f) = e$;
- $\mathrm{im}(P) = E$;
- $\ker(P) \cong F$;

Pelo TNI,

$$\begin{aligned} \dim(E \times F) &= \dim(\ker(P)) + \dim(\mathrm{im}(P)) \\ &= \dim(E) + \dim(F) \end{aligned}$$

Uma aplicação

Tome

$$S\colon E \times F \to V, \qquad S(e,f) = e + f$$

Então

- $$\begin{aligned}\operatorname{im}(S) &= \{S(e,f) : (e,f) \in E \times F\}\\ &= \{e + f : e \in E, f \in F\}\\ &= E + F\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\ker(S) &= \{(e,f) : S(e,f) = 0_V \in E \times F\}\\ &= \{(e,f) : e + f = 0_V\}\\ &= \{(e,f) : e = -f \in E \cap F\}\\ &= \{(x,-x) : x \in E \cap F\}\\ &\cong E \cap F\end{aligned}$$

Uma aplicação

- $S\colon E \times F \to V$, $S(e,f) = e + f$;
- $\mathrm{im}(S) = E + F$;
- $\ker(S) \cong E \cap F$;

Pelo TNI,

$$\begin{aligned} \dim(E \times F) &= \dim(\ker(S)) + \dim(\mathrm{im}(S)) \\ \dim(E) + \dim(F) &= \dim(E + F) + \dim(E \cap F) \end{aligned}$$